



Kui mobiiltelefoniga saab pildistada ja parkimise eest maksta ning interneti kaudu maksuametiga suhelda, tekib lastel, lapsevanematel ja teistelgi küsimus, kas ja kuidas saaks ka matemaatikaõpetuses tänapäeva infotehnoloogiavahendeid kasutada.

Kolm roigast

E n o T õ n i s s o n

Tartu Ülikooli arvutiteaduse instituudi lektor

Notsu tippas natuke lähemale, et näha, millega see liah seal õieti nii ametis on. Liahi nina ees maas vedeles kolm roigast ja liah muudkui vahtis neid. Kaks roigast olid üht otsa pidi kokku pandud, kolmas aga lebas risti nende peal. Notsu arvas, et äkki see on mingisugune Lõks.

(A. A. Milne. Karupoeg Puhh. Tln, 1994, lk 211)

Ühiskonna ootusi matemaatikaõpetusele on kirjeldatud põhikooli ja gümnaasiumi riiklikus õppekavas (õieti selle lisas). Seal on kirjutatud, et matemaatika õppimine arendab õpilaste püsivust, sihikindlust, kriitilist mõtlemist, loominguilist aktiivsust. Matemaatikaõpetus avab matemaatika seismise harmoonia, võimaldab tunnetada loogilise mõttekäigu ilu ja elegantsust, soodustab geomeetriliste vormide tajumist jne. *Põhikooli matemaatikaõpetusega taotletakse, et õpilane õpib ümbritseva maailma esemeid ja nähtusi järjestama, võrdlema, rühmitama, loendama, mõõtma, arvutama peast, kirjalikult ja taskuarvutil, õpib reaalsuse situatsioone matemaatiliselt kirjeldama, analüüsima, arendab oma matemaatilisi võimeid, intuitsiooni ja leidlikkust; tunneb rõõmu matemaatika-geotelemisest.*

Kena! Õige! Aga kuidas arvuti abiga nende ideede teostumisele kaasa aidata? Kas arvuti on imerelv, mida kasu-

tades saabubki õnn meie õuele? Või on arvutikasutusel ka negatiivseid külgi?

Eesmärkide saavutamist püütakse kontrollida. Osa neist on võimalik testide, (riiklike) kontrolltööde ja (riigi)eksamitega kontrollida. Selliseid kontrollitavaid eesmärke sageli ka tähtsustatakse rohkem. Kas arvuti abil saaks neid eesmärke paremini saavutada? Jah, mitmel juhul saaks.

Kas arvuti abil saaks neid eesmärke, mille saavutamist ei saa hästi kontrollida (nt mõlema loetelu viimaseid – rõõmu tundmise – eesmärke), aga mis on tegelikult väga olulised, senisest rohkem esile tuua? Jah, mitmel juhul saaks.

Ülalmainitud eesmärgid on riiklikult dokumenteeritud ja tõenäoliselt pole paljud õpilased neid kunagi sellisel kujul endale teadvustanud. (Kas nad peaksidki?)

Järgnevas "inkrimineerime" õpilasele mõned matemaatika õppimisega seotud tahtmised ja mittetahtmised. Loetelu po-

le kindlasti täielik ega põhine tõsistel teadusuuringutel.

Õpilane

- tahab õppida talle sobivas tempos;
- tahab ise avastada (või hoopis, et kõik oleks lahtikirjutatult ette antud?);
- tahab teada, mis saab siis, kui mingit tingimust veidi muuta;
- tahab, et ta saaks oma mõttekäikude ja vastuste kohta kohe tagasisidet;
- tahab, et teda kiidetaks, kui tal midagi õnnestub;
- ei taha, et teda avalikult laidetaks, kui tal midagi ebaõnnestub;
- ei taha teha liiga palju rutiinset tööd, mida ta nagnunii oskab.

Järgnevas vaatame, kuidas saab arvuti nende tahtmiste juures abiks olla.

Sobiv tempo

Tavalises õppetunnis ei saa õpetaja kogu aeg arvestada kõigile õpilastele sobiva õppimistempona. Osa jaoks võib tempo olla liiga kiire, teiste jaoks liiga

aeglane, osa võiks juba uut infot saada, teised pole eelmisest veel aru saanud. Kui iga õpilane on eraldi arvuti taga, oleks ju tore, kui see "õpetaks" teda täpselt sellise kiirusega, nagu vaja. Läheds edasi siis, kui eelmise osa arusaamist on kontrollitud, vajadusel lisades teavet jne. Õpiprogrammide loomist ja ehitust kirjeldavates raamatutes on sellistest programmidest juttu, neid võib nimetada tutorial-tüüpi õpiprogrammideks. Sellised programmid pretendeerisid teatud määral asendama õpetajat. Õnneks või kahjuks on nende loomine vähegi keerulisemate teemade jaoks väga problemaatiline ja ühtegi matemaatika puhul toimivat head näidet pole tuua ei Eestist ega kaugemalt.

Hoopis reaalsem on, et õpilane tegutseb töölehte järgides mõne programmi-ga. Tööleht võib olla paberil või arvutis. Selliseid töölehti erinevate programmide abil matemaatikaga tegelemiseks on eesti keeles juba sadu (vt www.koolielu.ee). Tööleht võib detailsem või vähem detailne olla, rohkem või vähem ette öelda. Kindlasti peab õpilasele jääma avastamisrõõm.

Otsimise ja avastamise rõõm

Väga palju otsimis- ja avastamisrõõmu pakuvad dünaamilise geomeetria programmid, millest Eestis on vabalt kasutatav ja eestikeelne *GeomeTricks* (vt joonis 1). Kooliprogrammi üks teema on kolmnurga mediaanid. Õpilane saab kolmnurka tipust lohistada ning kontrollida, kas tema püstitatud hüpotees (milline?) ka siis kehtib. Aga kuidas on lood väikeste tekkinud kolmnurkade pindaladega?

Visuaalse poole pealt on arvuti abil kindlasti huvitav käsitleda funktsioonide graafikuid ja teisi jooni. Koolis kipub õpilasele jääma mulje, et jooned piirduvadki vaid sirgete, parabolide, sinusoidide, tangensoidide ja veel mõnega. Täiesti vaatlemata jääb näiteks südamekujuline joon ja tema võrrand (vt joonis 2). Või paljud teised, mis on toodud näiteks Hiljar Uudevaldi magistritöös "Kunstigeomeetria" (www.art.tartu.ee/~illi).

Funktsioonide graafikuid saab skitseerida ja uurida mitme programmiga, näiteks *StudyWorks*, *Funktion*. Põhifunktsioonide graafikute õppimiseks on spetsiaalne harjutamisprogramm, mille on teinud Dmitri Lepp ja Marina Issako-

va. Ühes režiimis peab õpilane määrama graafiku järgi funktsiooni tüübi ning kordajad, teises režiimis võrrandi järgi graafiku skitseerimiseks vajalikud punktid. Vale vastuse korral antakse õpilasele vihjeid.

Jõudsimegi selleni, et õpilane tahab saada kiiresti tagasisidet.

Tagasiside

On selge, et õpetaja ei jõua õpilase kõigile mõttekäikudele ja vastustele kiiresti reageerida. Kontrolltöö saab õpilane hinnatult kätte tõenäoliselt järgmisel tunnil, mil selle temaatika ei pruugi tema jaoks enam aktuaalne olla. Paraku on õpilase tegevuse kohta adekvaatse reaktsiooni andmine keeruline ning arvutitele pandud lootused pole veel kaugeltki täiel määral täitunud. Sageli on arvutist aga siiski kasu.

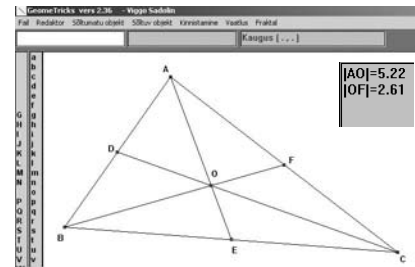
Arvutit kasutades saab õpilane tihti ise vaadata, kas tulemus vastab nõutule ja soovitule, ning vajadusel tehtut korrigeerida. Dünaamilise geomeetria eeltoodud võimalused on üks näide sellisest lähenemisest.

Kahtlemata on arvuti abil võimalik reageerimist teatud määral automatiseerida. Programm esitab vihjeid, nõuandeid, hindab vastust. Funktsioonide graafikute harjutamise kirjeldatud programm on just selline. Planeerimisel on sellelaadne programm ka põhikooli algebra jaoks, esialgne nimi on *T-algebra*.

Eraldi tuleb mainida küsimustele vastamise programme, nt *Hot Potatoes*. Eesti koolidele on kättesaadav testisüsteem *APSTest*, mis tuleb arvutitesse installeerida. *APSTest*'i kasutamiseks on olemas juba suur hulk teste ka matemaatika kohta. Teste saab kasutada õppimise mitmes faasis, kindlasti teadmiste kontrolliks. Lisaks sellele, et vastuste kohta öeldakse *õige* või *vale* ja testi lõpus öeldakse näiteks, et 70% vastustest olid õiged, saab õpilasi kiita, ja see on väga oluline. Samuti on tähtis, et laituse või viite ebakohale saab õpilane vaikselt ja teiste teadmata.

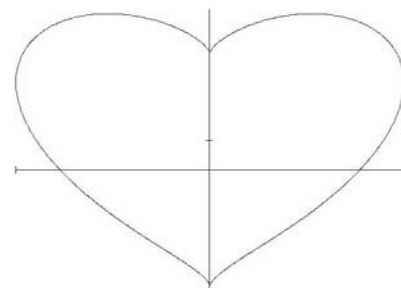
Igavad rutiinsed ülesanded

Oleks ju tore, kui keegi teeks meie eest ära üksluised tööd. Mõnel juhul saab arvuti sellega hakkama. Juhuslike sündmuste puhul kehtivad seaduspärasused tulevad esile alles piisavalt suure katsete arvu korral. Võib ju nõuda õpilasel, et



Joonis 1. Kolmnurka saab tipust "lohistada" ja kontrollida, kas püstitatud hüpotees ka siis kehtib. Kuidas on lood näiteks tekkinud väikeste kolmnurkade pindaladega?

$$y = \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^2 \pm \sqrt{1-x^2}}$$

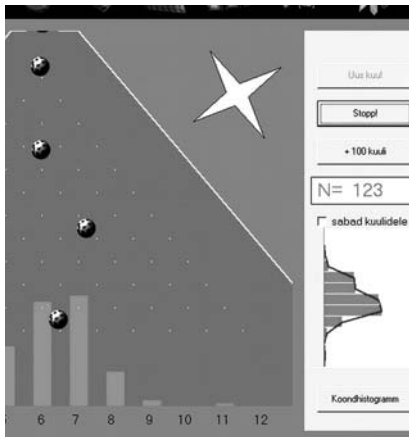


Joonis 2. "Südamlik" joon koos oma võrrandiga.

ta kümme korda münti loobiks ja paneks kirja, kas tuli kull või kiri. Või lasta sada korda visata. Või nõuda, et ta viskaks nädalavahetusel 10 000 korda. Mingil hetkel muutub selline nõue ebareaalseks, paraku võib see hetk saabuda enne, kui seaduspära nähtavale tuleb. Selliste ülesannete puhul saabki kasutada näiteks tõenäosusteooria programmi, mille sihtgrupiks on märgitud küll 12. klass, aga mis on tegelikult kasutatav juba palju varem. Näiteks toome Galtoni võre. Kuul, kukkudes kõige ülemisele naelale, võib langeda võrdse tõenäosusega kas vasakule või paremale ja satub niiviisi järgmisele naelale. Sealt võib ta jälle ühesuguse tõenäosusega langeda kas vasakule või paremale (vt joonis 3 pöördel).

Katsete piisavalt suure arvu puhul hakkab paremal toodud graafik meenutama Gaussi kõverat, joont, mis oli enne euro kasutusele tulekut ilmselt üks laiemalt taskuskantav joon, eriti Saksamaal (vt joonis 4 pöördel).

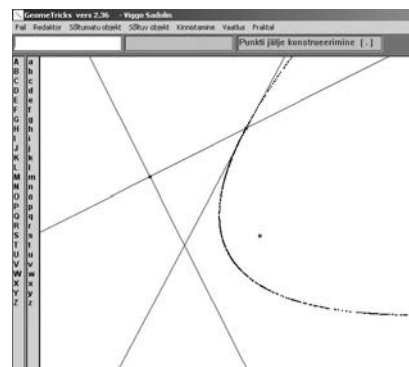
Ka matemaatilise statistika õppimine



Joonis 3. Kuul, kukkudes kõige ülemisele naelale, võib langeda võrdse tõenäosusega kas vasakule või paremale, ja satub niiviisi järgmisele naelale, kust võib taas kukkuda vasakule või paremale. Katsete piisavalt suure arvu puhul hakkab paremal toodud graafik meenutama Gaussi kõverat.



Joonis 4. Carl Friedrich Gauss rahatähel, tagaplaanil tema kuulus Gaussi kõver. Pilt on leitud veebist.



Joonis 5. Kas tegemist on parabooli, tema juhtjoone ja fookusega? Või lähevad inimese jäljed tara ja elektriposti vahelt nii läbi, et inimene on tarast ja postist kogu aeg sama kaugel?

ilma arvutita on tülikas. Vähegi suurema andmete arvu puhul tuleb kas või standardhälbe leidmiseks teha palju arvutamistöid, mida õpilane ilmselt küll oskab, aga mis võtab liiga palju aega. Sel juhul oleks abi näiteks tavalisest tabeltöötlusprogrammist (*Excel*) või mõnest spetsiaalsest matemaatikaprogrammist (nt *StudyWorks*).

Muidugi on omaette küsimus, mida lugeda nii rutiinseks tegevuseks, et see arvuti teha jätta, ilma et õpilane sellest kahju saaks (või õieti – et kasu saamata ei jääks). Kas see tegevus peaks õpilasel varem selge olema? Või võib ka mõne uue, aga ebamugava ülesande arvutile jätta? Piiri tõmbamine on keeruline ja sõltub paljudest asjaoludest (vt W. Hergert jt. *Indispensable Manual Calculation Skills in a CAS Environment*, http://b.kutzler.com/art_eng.htm).

Kui arvuti juba midagi oskab, kas siis inimene peab oskama?

Kas mündi viskamise võib arvutile jätta? Kas standardhälbe arvutamise võib arvutile jätta? Kas sarnaste liikmete koondamise võib arvutile jätta? Aga logaritmvõrrandi lahendamise? Aga trigonomeetrilise võrrandi lahendamise? Aga ruutvõrrandi lahendamise? Kas õpilane peab peast teadma ja oskama kasutada ruutvõrrandi lahendivalemit?

See on kole valem, vist põhikooli kole-daim: murrujoon, pluss-miinus, ruutjuur. Kas võiks selle valemi teadmise jätta arvutile? Näiteks *StudyWorks* tuleb ruutvõrrandi lahendamise kohta toime.

StudyWorks'iga lahendamisel tekib veel huvitavaid küsimusi. Kui lahendame näiteks võrrandit $x^2 = -4$, siis *StudyWorks*'i vastuses on sees i . Aga õpik ütleb, et reaalarvulisi lahendeid pole. Kompleksarvudest koolis aga tavaliselt ei räägita. Kas peaks? Kas see teeb mõnele õpilasele asja veel segasemaks?

Mitme programmi kasutamisel ilmneb asjaolusid, millest pole tunnis veel räägitud ja võib-olla kunagi ei räägitagi. Mida sel juhul teha?

Muidugi tekib küsimus, et kui arvuti juba midagi oskab, kas siis inimene peab seda samuti oskama või võibki lihtsalt kasutada. Siin saab tuua võrdluse kehalise tegevusega – liikumisega. (Vt B. Kutzler. *The Algebraic Calculator*

as a Pedagogical Tool for Teaching Mathematics, http://b.kutzler.com/art_eng.htm). Aegade jooksul on inimene kasutanud liikumiseks erinevaid abivahendeid. Kui on vaja minna kiiresti kuhugi kaugele, kasutatakse lennukit, autot või rongi. Üle vee saab laeva või paadiga. Nurgapeal asuva ajalehekioski juurde on mõistlik minna jalgsi, natuke kaugeemale jalgrattaga. Samas pole kadunud, vaid pigem tõusnud vajadus ja tahtmine end ikka ise liigutada, käia jooksmas, ujumas, uisutamas jne.

Oma liikumisvahendid (nt ratastool) on neile, kes mingil põhjusel ise liikuda ei saa. See kompenseerib nende nõrku kohti, annab teistega võrdsemad võimalused.

Matemaatikaõpetuseski on meil vaja kord rongi, kord jooksmist, mõnikord roomamistki, aga vahel ka ratastooli.

Õpetaja võidab ja kaotab aega

Mida on kaotada või võita õpetajal, kui ta arvutit kasutab? Kindlasti on tal võita ja kaotada aega. Esimest korda antud teemal tunni ettevalmistamine võtab esialgu ilmselt rohkem aega kui ilma arvutita, kuigi kasutada on palju teiste tehtud materjale (vt nt www.koolielu.ee). Võit saabub siis, kui koostatud materjale saab korduvalt kasutada, näiteks järgmisel aastal.

Õpetaja saab arvutit kasutada enne tundi, tunni ajal ja pärast seda. Vahel arvatakse, et tunnis peavad just õpilased arvutiklassis arvuti taga olema, aga see on ainult üks võimalus. Järjest enamates koolides saab õpetaja arvutipilti seinale näidata. Ja on täiesti võimalik, et tunnis pole üldse arvutit, õpetaja kasutab seda enne või pärast tunde.

Aega võib võita sellega, et osa programmidega koguneb info õpilase edasijõudmise kohta. *APSTest*'i testide puhul jäävad õpetaja käsutusse õpilase vastused, statistika vastuste õigsuse kohta jms.

Et õpetajad saaksid arvutit kasutada, peavad nad seda oskama, võimalusi ja ohte teadma. Aastal 2000 korraldasime Rein Prankiga paljude kolleegide abiga aastase koolituse (12 ainepunkti) "Arvutid koolimatemaatikas", mille raames said ligi 40 tegevõpetajat Eesti paljudest paikadest teema kohta suhteliselt põhjaliku ülevaate ja



Kui arvuti juba midagi oskab, kas siis inimene peab seda samuti oskama? Või võibki seda seadet lihtsalt kasutada.

ettevalmistuse. See oli väga tore koolitus, mille käigus õppisime palju ka ise. Loodetavasti õpetavad need õpetajad kolleege ise edasi, sest matemaatikaõpetajaid on palju.

Tulevased matemaatikaõpetajad, kes õpivad Tartu Ülikoolis või Tallinna Pedagoogikaülikoolis, saavad arvutite kasutamise matemaatikaõpetuses ülevaate kursustel. Enne artikli kirjutamist pidasingi nõu kursusel "Arvutid koolimatematikas" (nii on vastava kursuse nimi Tartu Ülikoolis) osalevate tudengitega. Muidugi ei jõua kaht ainepunkti andvasse kursusesse panna kõike vajalikku. Õnneks saavad meie tudengid võtta osa ka kursusest "Õpiprogrammid" ja õpitarkvara seminarist, mis samuti selle teemaikaga tihedalt seotud on.

Mitte ainult õpetajale

Antud temaatikast on huvitatud või võiks olla huvitatud veel inimesi. Oluline huvi, kas ja kuidas arvuteid matemaatikaõpetuses kasutatakse, peaks olema lapsevanematel. Nimelt ei pruugi arvuteid kasutada vaid koolis. Ilmselt on võimalik ja vajalik rakendada selleks otstarbeks ka koduarvuteid. Lapsevanem võiks enam-vähem teada, millega tema lapsed arvuti juures tegelevad, ja võimalust mööda tegevust suunata. (Ega see kerge küll ole.) Loomulikult tekib siin küsimus, kas näiteks õpetajal on õige nõuda õpilaselt,

et ta koduarvutil ülesandeid teeks. Paljudes peredes ju arvutit pole ega tulegi. Aga kas on õige kodudes olevad arvutid ses mõttes üldse tähelepanu ja rakenduseta jätta?

Kooli juhtkond saab arvuti kasutamist soodustada või takistada tunniplaani koostamisega. Paljudes koolides on õpetajatel võimalik viia osa matemaatikatunde läbi arvutiklassis ja/või kasutada tavalises klassis vajadusel dataprojektorit. Samuti saab soodustada õpetajate sellesisulist koolitamist.

Haridusametnikud saavad arvutite kasutamist mitmel moel mõjutada. Näiteks õpetajatele mõeldud dokumentide või abimaterjalide kaudu. Riiklik Eksami- ja Kvalifikatsioonikeskus ilmutab kogumiku "Abiks matemaatikaõpetajale", milles märgatav osa käsitleb arvutiga seotud teemasid. Oluline on õppekavaga seonduv. Õppekava koostamisel saab iga õpetaja koolitasandil kaasa lüüa, aga ka riigi tasandil on kaasalõõmine võimalik ja oodatud. Millise detailisusega arvuti kasutamine õppekavva kirjutada, on iseküsimus, mida tuleb põhjalikult käsitleda. Sellega peavad lisaks õppekava koostajatele tegelema ka teised selle temaatikaga kursis olevad inimesed.

Oma roll on kahtlemata (riigi)eksami- tel ja tasemetöödel. Praegu toimuvad need paberil ning on selge, et arvuti ka-

sutamise juures õpetaja enne mõtleb, kas see ikka toetab õpilast eksamiks või tasemetööks valmistumisel. Kas eksamil võiks arvutiprogramme kasutada? Millal selliseid eksameid läbi viima hakata?

Ülevaade õpikuautorite, teadlaste ja õpitarkvara loojate rollist käesolevasse artiklisse ei mahu.

Kas roikad, mis takerduvad kodaraisse?

Käesolevas artiklis jäi vaatluse alt välja mitu toredat programmi (LOGO, Spirograaf, *Tabletalk*, *Pattern* jne). Eestis on õpilastele ja õpetajatele kättesaadavad (suur osa neist Tiigrihüppe Sihtasutuse ja PHARE ISE abiga) paljud programmid ja abimaterjalid. Lausa vägisi on koolidesse saadetud viis PHARE ISE CD-d, mille koopiad on ka veebis (www.ise.ee). Teatud komplekt matemaatika õppimiseks sobivaid programme ja materjale on olemas, nüüd jäävad küsimused, kas, kuidas, millal neid kasutada.

Mida näete joonisel 5, mis on tehtav dunaamilise geomeetria programmi *GeomeTricks* abil ja mida võib näiteks õpetaja tunnis teha? Kas seal on parabool, tema juhtjoon, fookus? Ristsirge, keskristirge, lõikepunktid? Või on seal hoopis inimene, kes on püüdnud tara ja elektriposti vahelt nii läbi minna, et oleks kogu aeg tarast ja elektripostist sama kaugel?

Mida saab teha arvutiprogrammidega matemaatikaõpetuses? Kas need on roikad, mis takerduvad kodaratesse? Või roikad, millest saab tähti moodustada? Või tähed, mis siruvad kauguses ja mille poole on raske minna? Või...

"Tark!" osatas liah põlglikult ja vajutas jala täie raskusega oma kolme roika peale. "Haridus!" pomises ta sapiselt, kõigi nelja jalaga oma roigaste peale karates (nüüd oli neid juba kuus). "Teadus! Vaat kus mul õige asi!" hüüdis ta kogu seda roikaklibu (nüüd oli neid seal juba kaksteistkümmend) õhku lüües. "Kui juba mingisugune Jänes tuleb ja teab! Häh!"