



Rein Prank: „Arvutiprogramm võib anda õpilasele lahenduste õigsuse kohta palju kiiremat ja täpsemat tagasisidet kui õpetaja.“

T-algebra – samm drillist edasi

R e i n P r a n k

TÜ arvutiteaduse instituudi dotsent

Möödunud aasta detsembris andis Tartu ülikooli arvutiteaduse instituudi töörühm Tiigrihüppe sihtasutusele üle õpiprogrammi T-algebra, mida me ise nimetame interaktiivseks avaldiste teisendamise keskkonnaks.

Täht „T“ programmi nimes viitab tiigrile ja programmi valmimine Tiigrihüppe projektina tähendab, et seda võib Eesti koolides ja õpilaste kodudes tasuta kasutada. Maailmas praeguseks loodud algebra õpiprogrammidest annab T-algebra õpilasele kõige detailsemat abi ja tagasisidet.

Käesolev artikkel ei eelda lugejalt matemaatikaõpetaja haridust, mõningase detailidesse süvenemise hinnaga saab igaüks siit teada, milliseid õpilaste ja õpetajate probleeme on autorid püüdnud selle programmiga lahendada, mida üks „tõsine“ õpiprogramm võib osata ja kuidas õppimist toetada.

T-algebra loodi tagasisideks

Matemaatikat õppides lahendavad õpilased sadu algebraülesandeid, kus teisendatakse avaldiseid. Nad leiavad paljudest tehetest koosnevate arvavaldiste väärtusi, teevad tehteid murdudega, lahendavad võrrandeid, võrratusi ja võrrandisüsteeme. Õpilastel on vaja saada

tagasisidet lahenduste õigsuse kohta ja mõnikord ka nõuandeid, kuidas ühes või teises olukorras lahendamist jätkata.

Vastuse õigsuse kontroll ja vea asukoha leidmine on teisendusülesannete korral oluliselt keerulisem kui ühe- või kahetehteliste ülesannete puhul nooremates klassides. Avaldised võivad omavahel võrdsed olla ka siis, kui nad on väliselt erinevad. Kui aga on selgunud, et vastus pole õige, on vea asukoha leidmine teisendusülesannetes üsna aeganõudev töö ka õpetaja jaoks. Etalonlahendusega võrdlemine siin pahasti ei aita. Õpilased võivad lahendust kirja panna eri pikkusega sammudena, teha samu samme erinevas järjekorras või kasutada koguni erinevaid lahendusideid. Tagajärg on, et harjutamise ajal jäävad vead tihti „reaalajas“ leidmata ja parandamata, nende põhjused diagnoosimata. Õpilane saab parandustega vihiku alles mitme päeva pärast kätte ega viitsi siis enam mõelda, millisest ekslikust ideest või lohakast arvu-

tusest viga tekkis. Nii võib usin harjutamine vigu hoopis kinnistada.

Nõuandeid saab õpilane klassis õpetajalt, kui ta julgeb neid küsida. Kodus ei tarvitse lapsevanem lahendamise ajal parajasti kohal olla ja tal ei pruugi jaguda ka teadmisi aitamiseks. Aga abi on kodus vaja, eriti kui ollakse koolist puudunud.

Kuidas võiks arvuti õpilasi aidata ja õpetajaid avaldiste pisidetallide töömahukast kontrollist vabastada? Kui vaatame õpitarkvara maailma poole, näeme seal eeskujuna drilliprogramme, mis nooremate klasside ülesannete juures on küllalt efektiivsed just kohe antava tagasiside tõttu (näiteks pranglimine). Drilliprogrammidega töötades sisestab õpilane ülesande vastuse ja programm hindab, kas see on õige. Teisendusülesannete puhul on aga ilmselt vaja kontrollida ka vahetulemusi.

T-algebrat disainides oli meie eesmärk luua programm, millega töötades õpilane koostab samasuguse sammu-

Lahenda võrratus

Joonis 1. T-algebra nõuanne operatsiooni valikuks.

Lahenda võrratus

Joonis 2. T-algebra lahendusaken veateatega.

dest koosneva lahenduse nagu paberil ja mis on suvalisel momendil võimeline andma nõu ning teatama vigadest. Peale selle pidi lahenduskeskkond sarnaselt vihikuga salvestama koostatud lahenduse ja tehtud vead.

Õpilane lahendab, T-algebra annab nõu ja kontrollib

T-algebras on realiseeritud 61 ülesandetüüpi. Programm katab suurema osa avaldiste teisendamise ülesannetest põhikolis:

- 1) täisarvuliste ja kümnendmurdudega avaldiste väärtuste arvutamine (4.–5. kl),
- 2) tehted harilike murdudega (6. kl),
- 3) lineaarsed võrrandid, võrratused, süsteemid (7.–8. kl),
- 4) operatsioonid üksliikmete ja hulkliikmetega (8. klass).

Näiteks murdude kohta on T-algebras ülesandetüübid murdude taandamiseks, laiendamiseks, ühenimeliseks teisendamiseks, nii ühenimeliste kui ka erinimeliste murdude liitmiseks, lahutamiseks,

korrumiseks ja jagamiseks, harilike ja kümnendmurdude vahelisteks teisedusteks, pöördarvu leidmiseks.

Õpilane lahendab ülesannet sammude kaupa. Iga samm koosneb kolmest tegevusest:

- 1) operatsiooni (teisendusreegli) valik menüüst,
- 2) operandide (st avaldise, võrrandi või võrrandisüsteemi nende osade, millele rakendatakse operatsiooni) märkimine,
- 3) operatsiooni tulemuse sisestamine (märgitud osade asemele).

Kui õpilasel on vaja abi, võib ta küsida T-algebralt nõu järgmise operatsiooni, operandide valiku või teisenduse tulemuse kohta. Näiteks joonisel 1 annab T-algebra nõu operatsiooni valikuks.

Programm kontrollib õpilase tööd iga sammu jooksul kahel momendil: pärast valikuid (1–2) ja pärast sisestust (3).

Joonisel 2 on kujutatud T-algebra lahendusaken. Sammudeks valitud operatsioonide nimed on kirjutatud kahe rea vahele, teisendamiseks valitud operan-

did on näidatud rohelise fooniga, teisen- damisel saadud tulemus pruuni fondiga. Kolmandaks sammuks on õpilane valinud operatsiooni „viin liikmeid teisele poolele” ja märkinud selleks liikmed 14 ja 4v, aga tulemuse sisestamisel on ta teinud märgivea. Kui avastatakse viga, annab T-algebra veateate ja järgmise tegevuse juurde saab asuda alles pärast vea parandamist.

Õpilasel on T-algebraga võimalik ka juba tehtud ja T-algebra poolt aktsepteeritud samme või nende osi tagasi võtta ning jätkata lahendust mingis teises suunas. Kui õpilane arvab, et ta on avaldise (võrrandi jne) antud ülesandetüübis nõutavale kujule teisendanud, tuleb tal vajutada nupule „*annan vastuse*”. Kui teisen- damist on vaja veel jätkata, antakse vastav veateade ja tuleb ette võtta järgmine samm. Kui vajaliku kujuga vastus on käes, siis enamiku ülesandetüüpide korral lahendus sellega ka lõpeb. Võrrandite ja võrratuste korral tuleb aga veel valida, kas viimane rida on vastus või on tegemist erijuhuga, kus lahendiks sobivad kõik arvud või lahendid puuduvad.

Mida T-algebra meelde jätab

T-algebra on ühelt poolt õpilast toetav lahendamiseskkond, mis teeb ära osa õpetaja või lapsevanema tööst harjutamise ajal, andes õpilasele nõu ja teatades kohe vigadest. Aga ta salvestab ka õpilase tehtud töö lahenduste faili. Iga ülesande kohta salvestatakse tekkinud lahendus (lõpetatud või poolik), kõik lahendamisel esinenud veasituatsioonid ja abi küsimise kohad. Poolelijäänud lahendust on võimalik jätkata. T-algebra õpilase programm võimaldab vea ja abi vajamise olukordi uuesti vaadata, samuti tuua ekraanile tabeli lahendamise- andmete üldise statistikaga. Tabelis on vead klassifitseeritud kahekümnesse kategooriasse, mis võimaldab hinnata, millistele eksimustele see õpilane peaks tähelepanu pöörama. Õpetaja võib klassi õpilaste lahendusfaile uurides järelda- da, milliseid küsimusi peab ta täiendavalt seletama ja millele õpilaste tähelepanu juhtima. T-algebra disainimisel on peetud silmas ka võimalust kasutada programmi õpilaste töö teaduslikuks uurimiseks, sest vigade diagnoosi ja klassifitseerimise automatiseerimisega avaneb võimalus koguda andmeid suu- rematelt õpilasarühmadelt.

Normaalseks tööks peab matemaatika õpiprogrammil olema hulk oskusi, mida me tavaliselt eeldame olevat õpetajal. Vaatame, millised oskused on tarvilikud avaldiste teisendamise harjutuste puhul.

Mis T-algebra sees on

Igasugune avaldistega tegelev programm peab kontrollima avaldiste sünktahtlikult korrektsust. Kui õpilane sisestab sammu tulemuse või õpetaja koostab uue ülesande, peab programm suutma ütelda, kas kasutaja (põhimõtteliselt üsna suvalisel viisil) sisestatud sümbolid moodustavad üldse mingi avaldise. Tegelikult kontrollib T-algebra ka operandide märkimise juures, kas märgitud osa on korrektne avaldis ja kas sealjuures on õigesti mõistetud tehete järjekorda.

Teiseks peab programm oskama aru saada avaldiste ja võrrandite semantikast. Erilise tähtsusega on kontroll, kas sammu tulemusena tekkiv uus avaldis/võrrand on võrdne/samaväärne eelmisel real olevaga. Kontrolliks teisendatakse mõlemad teatud nn kanoonilisele kujule.

T-algebra sellesse ossa, mis annab veateateid, on programmeeritud natuke õpetajate teadmisi sellest, milliseid vigu õpilased tüüpiliselt teevad. Programm uurib pärast mittevõrdumise tuvastamist veel seda, kas tegemist on näiteks märgiveaga, arvutusveaga (muus osas on avaldise kuju õige), tehete tegemisega vales järjekorras jne. Tuleb aga tunnistada, et ühe tõsise matemaatikaõpetaja taset me T-algebraga saavutanud ei ole ja iga kord pole teade vea sisu kohta päris täpne. Samas ei ole juhtunud, et T-algebra oleks vigaseks lugenud veatu sammu või lubaks avaldise eelmisega mittevõrdseks teisendada.

T-algebra kõige intelligentsem osa on automaatlahendaja, mis oskab erinevalt arvutialgebra süsteemidest leida mitte ainult ülesannete vastuseid (neid võiks ju sisestada ka ülesandeid koostav õpetaja), vaid ka lahendusi. Kui arvutialgebra süsteemid võivad inseneri või teadlase jaoks lahendada ülesandeid mingite kõrgemasse matemaatikasse kuuluvate meetoditega, siis õpetamiseks peavad lahendused koosnema täpselt samade teisendusoperatsioonidega tehtud sammudest, mis on menüüs õpilase käsutuses. Lahendajas on iga ülesandetuubi jaoks realiseeritud sama lahendusalgoritm, mida on soovitatud õpikus või me-

toodilises kirjanduses, et T-algebra oma nõuannetega toetaks õpitava algoritmi omandamist. On muidugi tõsi, et paljudes ülesandetuupides saab konstrueerida „nõksuga“ ülesandeid, millel leidub mingi kavalam lahendus, mis viib sihile standardalgoritmist kiiremini. Selliseid lahendusi T-algebra lahendaja ei leia. Aga ta ei keela õpilasel ülesannet omal viisil lahendada ja tunnistab õige lahenduse õigeks.

Räägime siinkohal ka ühest puuduvast funktsioonist. Üldjuhul T-algebra ei kontrolli õpilase lahendussammu otstarbekust (lineaarvõrrandi lahendamise reeglites on siiski mõningad otstarbekuse kontrolli elemendid). Häda on selles, et pole olemas mõistlikku ja üldist otstarbekuse mõõtu. Ei tohi ära keelata standardalgoritmist erinevat sammu, sest see võib viia hoopis ökonoomsema lahenduseni. Teiselt poolt ei tohi programm nõuda õpilasel ka lühimat lahendust (kui automaatlahendajas oleks õpiku algoritmi asemel realiseeritud mingi lahenduse pikkust minimeeriv algoritm). Näiteks viiosteist aastat tagasi avastasime pärast matemaatilise loogika tõestusharjutuste lahendusi optimeeriva algoritmi programmeerimist, et mitmetel palju aastaid kasutusel olnud ülesannetel leidus ootamatult lühike lahendus. Peab ka arvestama, et mõnelgi juhul soovivad õpetajad ühtedele õpilastele teha lahendustes lühemaid samme (näiteks teha korruga alati ainult tehteid kahe arvu vahel), teistele aga vastupidi – pikemaid (näiteks püüda liita või korrutada peast mitu arvu korruga).

Kuidas võiks T-algebrat kasutada

Praegu ütlevad arvuteid kasutavad õpetajad, et nad kasutavad õpitarkvara peamiselt projektoriga tehtavateks demonstrotsioonideks ja tundide andmiseks arvutiklassis. Demonstrotsioonid on kindlasti vajalikud ning projektori ja sülearvuti olemasolul ka küllalt kergesti korraldatavad. Arvutiklassi tundidega on asi keerulisem. On raske teemasid niimoodi tundideks jagada, et teatud kindlal (ja sealjuures rohkem arvutiklassist kui õpetajast sõltuval) päeval tehakse terve tund arvutitel. Lisaks kaob üksikute harvade tundide kaupa arvutiklassis töötades õpitarkvara kasutamise see eelis, et igaüks võib tagasisidet saades

töötada oma kiirusega. Üksik arvutitund tuleb planeerida nii, et kõik jõuavad töö valmis, muidu see jääbki lõpetamata.

Märksa paindlikumalt saaks töötada, kui kasutada ka koduseid ülesandeid. Hakkame jõudma aega, mil õpilastel on koduski arvuti. Mitmesuguse kahtlase väärtusega tegevuse kõrvale oleks koduarvutile vaja ka tõiseid rakendusi. Muidugi peaksid õpilased saama kodutöid teha ka vabal ajal arvutiklassis. Kui on võimalus pooleli jäänud töö iseseisvalt lõpetada, saaks ka praktikume arvutiklassis vabamalt planeerida. Töö mahu saaks valida nii, et kiirematel oleks võimalus tunni jooksul valmis jõuda, teised jätkaksid hiljem. Samuti poleks väga suur probleem, kui õpilased istuvad arvutiklassis ühe arvuti taga kahekesi, aga väljaspool tundi peavad lahendama ükski.

Kui kasutatav programm on õpilastele juba tuttav (näiteks T-algebra võimaldab lahendada ülesandeid mitme aasta jooksul), pole praktikume arvutiklassis alati vajagi. Iga uue ülesandetuubi puhul saab mõne lahenduse tahvli asemel ka projektoriga läbi teha, juhtides tähelepanu sellele tüübile omastele momentidele programmi kasutamisel (T-algebra puhul näiteks tööle uute esmakordselt kasutusele tulevate teisendusreeglitega). Kodused ülesanded võiks anda lahendamiseks arvutil.

Programmi koduleht ja autorid

Programmi saab endale alla laadida T-algebra kodulehelt <http://math.ut.ee/T-algebra/>. Sealsamas on juhend õpetajale (sellest võivad kasulikke leida ka õpilane ja lapsevanem) ning ülesandekogud kõikide T-algebraga kaetud teemade jaoks. Kodulehelt võib leida viited T-algebra kohta teadusajakirjadesse ja konverentside kogumikesse kirjutatud artiklitele.

T-algebra on programmeerinud TÜ arvutiteaduse instituudi kraadiõppurid Marina Lepp, Dmitri Lepp ja Vahur Vaiksaar. Kahele esimesele neist oli T-algebra doktoritöö põhiosaks, Vahur Vaiksaar piirdub ilmselt magistratöoga. Eri tüüpi ülesannete lahendamise dialoogide disainimiseks töötas meil kaks talve seminar, kus „tegelikku õpetamist“ esindasid Tartu Mart Reiniku gümnaasiumi õpetajad Mart ja Maire Oja, aga osa võttis ka meie teaduskonna didaktika õppejõude. Töögrupi juht oli Rein Prank.